PART3　平方完成と $y=ax^2+bx+c$ のグラフ

例題

次の２次関数のグラフの軸と頂点を求めよ。

(1)　$y=x^2+4x+2$　　　(2)　$y=-2x^2+2x+1$

Point Pickup

練習

次の 2 次関数のグラフの軸と頂点を求めよ。

(1)　$y=x^2+x+1$

(2)　$y=-3x^2+6x-3$

(3)　$y=2x^2-3x+4$

(4)　$y=-\dfrac{1}{3}x^2-x-6$

第5講　PART3　確認問題

次の2次関数のグラフの軸と頂点を求めよ。

1　$y=x^2-x+2$

軸　直線 $x=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$

頂点　点 $\left(\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}, \frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\right)$

2　$y=-2x^2+4x-2$

軸　直線 $x=\boxed{キ}$

頂点　点 $\left(\boxed{ク}, \boxed{ケ}\right)$

3　$y=3x^2+4x+2$

軸　直線 $x=-\frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$

頂点　点 $\left(-\frac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}, \frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}\right)$

4　$y=-\dfrac{1}{2}x^2-3x-7$

軸　直線 $x=-\boxed{タ}$

頂点　点$\left(-\boxed{チ},\ -\dfrac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}\right)$

PART3　平方完成と $y=ax^2+bx+c$ のグラフ

例題

次の２次関数のグラフの軸と頂点を求めよ。

(1)　$y=x^2+4x+2$　　　(2)　$y=-2x^2+2x+1$

(1)　$y=x^2+4x+2=(x+2)^2-4+2=(x+2)^2-2$

軸は 直線 $x=-2$　　　頂点は 点 $(-2,\ -2)$

(2)　$y=-2x^2+2x+1=-2(x^2-x)+1$

$$=-2\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}+1=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+1=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$$

軸は 直線 $x=\frac{1}{2}$　　　頂点は　点 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$

練習

次の２次関数のグラフの軸と頂点を求めよ。

(1)　$y=x^2+x+1$　　　(2)　$y=-3x^2+6x-3$

(3)　$y=2x^2-3x+4$　　　(4)　$y=-\frac{1}{3}x^2-x-6$

(1)　$y=x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

軸は　直線 $x=-\frac{1}{2}$　　　頂点は 点 $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right)$

(2)　$y=-3x^2+6x-3=-3(x^2-2x)-3$

$$=-3\{(x-1)^2-1\}-3=-3(x-1)^2+3-3=-3(x-1)^2$$

軸は　直線 $x=1$　　　頂点は 点 $(1,\ 0)$

(3)　$y=2x^2-3x+4=2\left(x^2-\frac{3}{2}x\right)+4$

$$=2\left\{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}\right\}+4$$

$$=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{8}+4=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{23}{8}$$

軸は　直線 $x=\dfrac{3}{4}$　　　頂点は　点 $\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{23}{8}\right)$

(4)　$y=-\dfrac{1}{3}x^2-x-6=-\dfrac{1}{3}(x^2+3x)-6$

$$=-\frac{1}{3}\left\{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right\}-6$$

$$=-\frac{1}{3}\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}-6=-\frac{1}{3}\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{21}{4}$$

軸は　直線 $x=-\dfrac{3}{2}$　　　頂点は　点 $\left(-\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{21}{4}\right)$

第５講　PART3　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：1，イ：2，ウ：1，エ：2，オ：7，

カ：4

[解説]

$$y=x^2-x+2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+2 \quad \text{[A]}$$

$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$$

軸　直線 $\boldsymbol{x=\frac{1}{2}}$　　頂点　点 $\boldsymbol{\left(\frac{1}{2},\ \frac{7}{4}\right)}$

[A]　平方完成
2 次式 ax^2+bx+c を
$a(x-p)^2+q$ の形に変形すること。
平方完成では，以下の変形を用いる。

$$x^2+bx=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

2 **[正解]** キ：1，ク：1，ケ：0

[解説]

$$y=-2x^2+4x-2 \quad \text{[B]}$$

$$=-2(x^2-2x)-2$$

$$=-2\{(x-1)^2-1\}-2$$

$$=-2(x-1)^2$$

軸　直線 $\boldsymbol{x=1}$　　頂点　点 $\boldsymbol{(1,\ 0)}$

[B]　平方完成
2 次式 ax^2+bx+c を
$a(x-p)^2+q$ の形に変形すること。
平方完成では，以下の変形を用いる。

$$x^2+bx=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

3 **[正解]** コ：2，サ：3，シ：2，ス：3，セ：2，
ソ：3

[解説]

$y=3x^2+4x+2$ [C]

$=3\left(x^2+\dfrac{4}{3}x\right)+2$

$=3\left\{\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^2-\dfrac{4}{9}\right\}+2$

$=3\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{2}{3}$

軸　直線 $x=-\dfrac{2}{3}$　　頂点　点 $\left(-\dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$

[C]　２次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフ
２次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを平行移動した放物線で
軸は 直線 $x=-\dfrac{b}{2a}$，
頂点は 点 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$

4 **[正解]** タ：3，チ：3，ツ：5，テ：2

[解説]

$y=-\dfrac{1}{2}x^2-3x-7$ [D]

$=-\dfrac{1}{2}(x^2+6x)-7$

$=-\dfrac{1}{2}\{(x+3)^2-9\}-7$

$=-\dfrac{1}{2}(x+3)^2-\dfrac{5}{2}$

軸　直線 $x=-3$　　頂点　点 $\left(-3,\ -\dfrac{5}{2}\right)$

[D]　２次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフ
２次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを平行移動した放物線で
軸は 直線 $x=-\dfrac{b}{2a}$，
頂点は 点 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$